Nozioni introduttive sui
FRATTALI

Agostino Guiso

Gennaio 2023

SOMMARIO

In questo lavoro vengono studiati alcuni concetti di base sugli Insiemi Frattali. Dunque, si esaminano elementi della Teoria della Dimensione (topologica e metrica), il concetto di Rettificabilità e la definizione di Frattale. Vengono poi descritti in modo sintetico svariati insiemi frattali, che costituiscono esempi "classici" . Una parte di essi sono anche figure auto – simili, per cui verrà studiata questa proprietà e la sua relazione con la dimensione frattale. Infine, come Appendice (Sezione VII) , viene proposta una definizione geometrica di superficie, da affiancare a quella ben nota. Ad entrambe si fa più volte riferimento in questo studio.

INDICE

I– Dimensioni topologiche (pag. 2)
II– Dimensioni metriche (pag. 7)
III– Rettificabilità (pag. 11)
IV– Frattali (pag. 12)
V– Esempi di frattali (pag. 13)
VI– Autosomiglianza (pag. 35)
VII– Appendice: una definizione geometrica di superficie (pag. 40)

Riferimenti (pag. 41)

I– DIMENSIONI TOPOLOGICHE

In questo capitolo facciamo una breve digressione sul concetto di dimensione topologica. Benchè tale caratteristica numerica non possa affatto discriminare sulla natura frattale o no di una figura, essa è comunque un utile strumento descrittivo nella relazione tra un frattale ed il suo spazio ambiente.

Vi sono vari modi per definire la dimensione topologica di uno spazio. Il più generale di essi è il seguente, detto anche **dimensione di ricoprimento** ([1]) .

Sia dato uno spazio topologico X e sia Ω l'insieme dei suoi aperti. Sia K un insieme qualunque, e sia $\{A_i\}_{i\in K}$ un ricoprimento di X mediante aperti, cioè:

$$(\forall i\in K)((A_i\in\Omega) \wedge (X = \cup_{i\in K}A_i)) \quad .$$

Diremo che tale ricoprimento è:

di ordine m, $m\in N$, $m \geq 2$, se m è il massimo numero di aperti del ricoprimento la cui intersezione è non vuota, cioè,

$$(\exists j1\in K)\ (\exists j2\in K)\ldots\ (\exists jm\in K)(A_{j1} \cap A_{j2} \cap\ldots \cap A_{jm} \neq \emptyset) \ ;$$

di ordine 1, se gli aperti del ricoprimento sono non vuoti e disgiunti;
di ordine 0, se tale ricoprimento contiene solo l'insieme vuoto.

Detto ciò, diremo che lo spazio X ha dimensione topologica n, $n\in N \cup\{-1 , \infty\}$ e scriveremo

$$\dim_T X = n \quad ,$$

se vale quanto segue:

$\dim_T X = -1$ sse $X = \emptyset$;

$\dim_T X = n$, $n\in N$, se n è il minimo numero naturale tale che qualunque ricoprimento di X si prenda, mediante aperti, esiste un ricoprimento più fine di ordine $n + 1$;

$\dim_T X = \infty$ se tale minimo non esiste

(Ricordiamo che se $\{A_i\}_{i\in K}$ e $\{B_j\}_{j\in L}$ sono due ricoprimenti di F mediante aperti, si dice che $\{B_j\}_{j\in L}$ è "più fine" di $\{A_i\}_{i\in K}$ se

$$(\forall j\in L)(\exists i\in K)(B_j \subseteq A_i) \quad .$$

Diciamo inoltre che, dato $a \in X$, lo spazio X ha **localmente in a** dimensione topologica n , se qualunque sia l'intorno U di a, esiste un intorno di V di a, $V \subset U$ e

$$\dim_T V = n \quad .$$

Indichiamo tale dimensione topologica locale con $\dim_T (a)$.

La dimensione topologica gode di alcune semplici proprietà.

1) se X' è uno spazio topologico omeomorfo ad X, allora

$$\dim_T X' = \dim_T X$$

(naturalmente, q uesta proprietà vale anche per due qualsiasi sottoinsiemi X_1 e X_2 di X i quali, come sottospazi di X, siano tra loro omeomorfi; oppure, per due insiemi $Y_1 \subset X$ e $Y_2 \subset X'$ i quali, come sottospazi, rispettivamente, di X e di X', siano tra loro omeomorfi);

2) $(\forall A \subset X)(\forall B \subset X)(A \subset B \rightarrow \dim_T A \leq \dim_T B)$.

(Le 1) e 2), sono di facile dimostrazione).

Riferiamoci adesso allo spazio R^n , considerato con l'usuale metrica e con la topologia indotta da tale metrica ([2]). Si hanno le seguenti proprietà.

1) $\dim_T R^n = n$ ([3]).

2) Se A è un qualunque aperto non vuoto di R^n ,

$$\dim_T A = n \quad ([3]).$$

3) Se a è un punto di R^n,

$$\dim_T \{a\} = 0 \quad .$$

4) Se *l* è un arco di linea di Jordan ([5]) allora, essendo esso un sottospazio di R^n omeomorfo all'intervallo [0 , 1] , avrà

$$\dim_T l = 1 \quad .$$

(Per una definizione geometrica di arco di linea, si veda [6]).

Osserviamo la Figura I.1 .

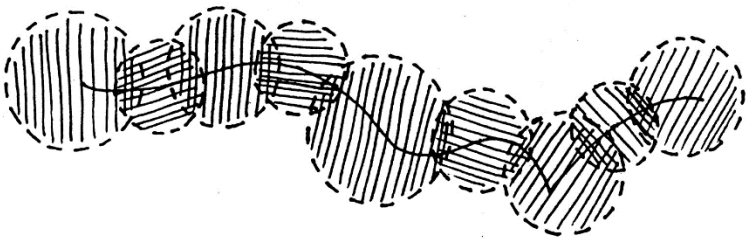

Figura I. 1

In essa, si considera un arco di linea *l* in R^2 (il piano ordinario) e lo si ricopre con aperti del piano: per esempio, cerchi aperti. (Nella figura, i cerchi sono "riempiti" con dei tratti). Come si può constatare, si ha un ricoprimento di ordine 2. Ci si rende conto facilmente che non esiste alcun ricoprimento di *l*, di ordine inferiore.

5) Se σ è un elemento di superficie semplice ([5] , [7]) allora, essendo esso un sottospazio di R^n omeomorfo al quadrato $[0 , 1] \times [0 , 1]$, avrà

$$\dim_T \sigma = 2$$

(Per una definizione geometrica di superficie, si veda la Sezione VII di questo scritto).

Le proprietà 4) e 5) ci portano a dare l'ordinaria definizione di linea (o curva) e di superficie di R^n .

Diremo che un sottospazio X di R^n è una **linea** , o **curva** , se esso è connesso, compatto, e $\dim_T X = 1$.

Analogamente, diremo che un sottospazio X di R^n è una **superficie** se esso è connesso, compatto, e $\dim_T X = 2$.

In questo scritto, quando non sia detto diversamente, con i termini linea o superficie si intenderanno le figure definite nel modo appena detto.

Un' ovvia generalizzazione dello spazio R^n , riguardo a spazi la cui dimensione è facilmente determinabile, è quella delle varietà topologiche. Ne ricordiamo la struttura. Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff, ogni punto del quale ha un intorno omeomorfo ad un aperto di R^n .

Se X è una varietà topologica di dimensione n , allora X ha, in ogni punto, dimensione topologica coincidente con la dimensione di varietà. Dunque,

$$\dim_T X = n$$

Osservazione – Gli archi di Jordan e gli elementi di superficie semplice, di cui si è detto in precedenza, sono anch'essi delle varietà, di dimensioni rispettive 1 e 2 .

Accenniamo adesso ad altri due modi di definire la dimensione topologica.

(**piccola dimensione induttiva** [1]) Indichiamo tale dimensione con dim . Uno spazio X ha dimensione n, $n \in N \cup \{-1 , \infty\}$, se vale quanto segue.

dim X= -1 se e solo solo $X = \emptyset$;

dim X= n , $n \geq 0$, se n è il più piccolo numero naturale tale che per ogni punto $p \in X$ e per ogni intorno U di p esiste un intorno V di p con $V \subset U$ e $\dim \partial V = n - 1$;

dim X = ∞ se e solo se $(\dim X \neq -1) \wedge (\forall n \in N)\ (\dim X \neq n)$.

(**grande dimensione induttiva** [1]) Indichiamo tale dimensione con Dim . Uno spazio X ha dimensione n, $n \in N \cup \{-1 , \infty\}$, se vale quanto segue.

Dim X = -1 se e solo solo $X = \emptyset$;

Dim X = n , $n \geq 0$, se n è il più piccolo numero naturale tale che due qualunque insiemi chiusi e disgiunti A e B di X possono essere separati da un insieme L di X con Dim L = $n - 1$.

Ricordiamo che un insieme $L \subseteq X$ **separa** due insiemi disgiunti A e B di X, se esistono due aperti disgiunti V e W di X tali che $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ e

$$L = X - (V \cup W) .$$

Abbiamo i seguenti teoremi.

Teorema 1 – Se X è uno spazio metrico compatto, allora $\dim_T X = \dim X = \mathrm{Dim}\, X$. ([1])

Dunque, le tre nozioni di dimensione topologica sono equivalenti tra loro per gli spazi metrici compatti.

Sussiste inoltre un importante teorema relativo alla dimensione del prodotto di spazi.

Teorema 2 – Dati due spazi metrici compatti X e Y,

$$\dim_T X \times Y \leq \dim_T X + \dim_T Y. \qquad ([3])$$

Concludiamo questa sezione con due ulteriori teoremi che, per quanto non essenziali per lo scopo di questo studio, sono però importanti nella teoria della dimensione topologica.

Teorema 3 – Se X è uno spazio metrico compatto e $\dim_T X = n$, allora X può essere **embedded** in R^{2n+1}, cioè esiste in R^{2n+1} un sottospazio Y che è omeomorfo ad X. ([4])

Il Teorema 3 ci garantisce, in sostanza, che uno spazio metrico compatto X, con $\dim_T X = n$, può essere "rappresentato" mediante un sottospazio Y di R^{2n+1}, con Y anch'esso compatto e tale che $\dim_T Y = n$.

Teorema 4 (Hurewicz) – Dati due spazi compatti X e Y, con $\dim_T X > \dim_T Y$, e considerata una funzione continua $f : X \to Y$, esiste $z \in f(X)$ tale che

$$\dim_T \{f^{-1}(z)\} \geq \dim_T X - \dim_T Y \qquad ([8])$$

Detto in altri termini, il Teorema 4 ci dà un'informazione sulla dimensione topologica delle **fibre** di f (cioè i sottoinsiemi W di X definiti dall'equazione $f(x) = z$ con $z \in f(X)$).

II– DIMENSIONI METRICHE

Daremo adesso, per gli spazi metrici, un'altra definizione di dimensione che, a differenza di quella topologica, può assumere valori in $R^+ \cup \{0 , \infty\}$. Essa ha un ruolo notevole all'interno della teoria dei frattali (e, come diremo più avanti, ha anche portato a coniare il termine **frattale**). Anche la dimensione metrica può essere definita in vari modi. Il più generale di essi è il seguente, detto anche **dimensione di Hausdorff** .

Sia X uno spazio metrico separabile (o, in particolare, compatto) e sia F un suo sottoinsieme. Si ricopra F con un insieme finito o numerabile di sottoinsiemi di X, di diametro minore di un prefissato $r \in R^+$; indichiamo con $\{U_{r,i}\}_{i\in N}$ tale ricoprimento.

Indichiamo con $\delta(A)$ il diametro di un insieme $A \subseteq X$.

Consideriamo, al variare di tali ricoprimenti di diametro minore di r , il numero

$$H_r^s(F) = \inf\{\Sigma_{i\in N}[\delta(U_{r.i})]^s\} \quad , \text{con } s \in R^+$$

Si consideri poi il

$$\lim_{r\to 0} H_r^s\,(F)$$

che indicheremo con $H^s(F)$ e che chiameremo **misura di Hausdorff s – dimensionale** di F .

Quando il limite esiste ed è finito, esso gode delle seguenti notevoli proprietà ([9]).

1) $(\forall p\in R^+)(\forall q\in R^+)(p < q \to H^p(F) \geq H^q(F))$;

2) $\dim_T F = n \to H^n(F) > 0$;

3) $H^{s+1}(F) = 0 \to \dim_T F \leq s$.

Definiamo ora la **dimensione di Hausdorff** di un insieme $F \subseteq X$, indicata con $\dim_H F$, ponendo :

$\dim_H F = \sup \{s : s \in R^+ \wedge H^s(F) > 0\}$,

oppure $\dim_H F = \propto$ se il precedente non esiste.

(Poteva anche porsi

$\dim_H F = \inf \{s : s \in R^+ \wedge H^s(F) = 0\}$) .

Diciamo inoltre che, dato $a \in X$, lo spazio X ha **localmente** in a , dimensione di Hausdorff η , se, qualunque sia l'intorno U di a , esiste un intorno V di a , $V \subset U$, e

$$\dim_H V = \eta \quad .$$

Indichiamo tale dimensione di Hausdorff locale con $\dim_H(a)$.

Dalle precedenti 1), 2), 3) segue che :

4) $\dim_H F \geq \dim_T F$.

Inoltre valgono le seguenti ulteriori proprietà ([3])

5) $(\forall A \subset X)(\forall B \subset X)(A \subseteq B \rightarrow \dim_H A \leq \dim_H B)$;

6) se $X = R^n$ e A è un aperto non vuoto di R^n allora $\dim_H A = \dim_T A = n$.

Dalle precedenti segue, dunque:

7) $\forall E \subseteq R^n$, $\dim_H E \leq n$

(cioè, la $\dim_H$ di un insieme dello spazio R^n, non supera la dimensione topologica di R^n) .

Vi è infine un'altra proprietà, di estrema importanza ai fini di questo studio. Occorre, anzitutto, una premessa: il concetto di **mappa lipschitziana** .

Dati due spazi metrici X e Y e dette d_X e d_Y le metriche in essi, una mappa f: $X \to Y$ è detta **lipschitziana** (o, semplicemente, **lipschitz**) , se

$(\exists\, k \in R^+)\ (\forall a_1 \in X)(\forall a_2 \in X)\ (\, d_Y\,(f(a_1)\,,\, f(a_2)) \le k \cdot d_X\,(a_1, a_2))$.

La mappa verrà poi detta detta **bi-lipschitz** se

$(\exists k \in R^+)(\exists k' \in R^+)(k \cdot d_X\,(a_1,a_2) \le d_Y(f(a_1),f(a_2)) \le k' \cdot d_X\,(a_1,a_2))$

[Equivalentemente, la definizione poteva anche darsi nel modo seguente

$(\exists \lambda \ge 1)(\frac{1}{\lambda} \cdot d_X\,(a_1,a_2) \le\ d_Y\,(f(a_1),f(a_2) \le \lambda \cdot d_X\,(a_1,a_2))$]

Osservazione – Se f: $X \to Y$ è una mappa bi-lipschitz , allora f è un omeomorfismo tra X e f(X) (la dimostrazione è semplice).

Abbiamo, quindi, la seguente proprietà ([10]) .

8) Dati due spazi X e Y, una mappa bi-lipschitz $f : X \to Y$, e un insieme $A \subseteq X$, si ha

$$\dim_H f(A) = \dim_H A \quad .$$

La proprietà 8) afferma, dunque, che le mappe bi-lipschitz sono trasformazioni tra spazi, che conservano la dimensione di Hausdorff.

La dimensione di Hausdorff non impone alcuna informazione sugli insiemi ricoprenti, a parte il loro diametro; ciò comporta che il calcolo di essa sia, di solito, molto complesso o, addirittura, che non si riesca ad ottenerla. Si sono allora escogitate altre definizioni di dimensione metrica, più semplici da calcolare, e che forniscono una approssimazione della $\dim_H$. Le due che esporremo sono :

la **dimensione di Kolmogorov** e la **dimensione di Assouad** .

Dimensione di Kolmogorov. Dato uno spazio metrico X , dato un suo sottoinsieme F , compatto, e dato $\varepsilon \in R^+$, si indichi con $N(\varepsilon,F)$ il minimo numero di sfere aperte di raggio ε , necessarie a ricoprire F.

La quantità H_r^s (F) di prima, viene sostituita da

$$N(\varepsilon,F) \cdot \varepsilon^s \ , \ s \in R^+$$

+

Quindi si considera l'insieme dei valori di $s \in R^+$ per i quali la quantità

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon,F) \cdot \varepsilon^s$$

rimane limitata.
In tale insieme, si prende l'estremo inferiore. Esso sarà, per definizione, la dimensione di Kolmogorov di F (che viene anche detta dimensione **entropia**). La indichiamo con

$$\dim_K F \quad .$$

Quindi,

$$\dim_K F = \inf\{s \in R^+ : (\exists k \in R^+)(\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon,F) \cdot \varepsilon^s \leq k)\} \quad .$$

Si dimostra senza difficoltà che tale numero può essere ricavato dal limite seguente, se esso esiste :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{log N(\varepsilon, F)}{log \frac{1}{\varepsilon}}$$

È in quest'ultima forma che, più spesso, viene presentata la $\dim_K$. [In questo scritto, l'operatore log indicherà sempre un logaritmo con una base qualsiasi, scelta una volta per tutte]
Il calcolo della $\dim_K$ può essere localizzato nel solito modo, in un punto $a \in X$, così come $\dim_T$ e $\dim_H$. Scriviamo allora $\dim_K(a)$, per indicare la $\dim_K$ in tale punto.
Segue dal modo in cui la si è definita, (oppure, si veda [11]), che

$$\dim_K X \geq \dim_H X \quad .$$

Dimensione di Assouad . Dato uno spazio metrico X, la sua dimensione di Assouad , indicata con $\dim_A X$ è definita come l'estremo inferiore di tutti i $\beta \in R^+$ che soddisfano quanto segue: esiste una costante $C > 0$ tale che qualunque insieme $A \subseteq X$, con $\mathrm{diam}(A) = d$, e qualunque $\varepsilon > 0$, A può essere ricoperto con al più $C \cdot \varepsilon^{-\beta}$ insiemi di diametro al più $\varepsilon \cdot d$.

Per la $\dim_A X$ vale la relazione

$$\dim_A X \geq \dim_K X \qquad [12]$$

e dunque, ricapitolando,

$$\dim_H X \leq \dim_K X \leq \dim_A X$$

Anche per $\dim_A$ e $\dim_K$ vale la proprietà 8) vista poc'anzi per $\dim_H$. Dunque, $\dim_A$ e $\dim_K$ sono anch'esse invarianti per trasformazioni bi-lipschitz tra spazi metrici.

III– RETTIFICABILITA'

La seguente definizione di **rettificabilità** è più restrittiva di quella usuale ([13]) , ma più utile per il nostro scopo di dare una definizione di frattale.
Dato uno spazio metrico X e $n \in N$, $n \neq 0$, diremo che X è **n – rettificabile** se esiste un **aperto limitato** $U \subset R^n$ ed esiste una mappa lipschitziana e surjettiva $f : U \to X$.
(Detto in altri termini, X è immagine di un insieme aperto e limitato U di R^n mediante una mappa lipschitziana.)
Il concetto di rettificabilità può essere reso intuitivo facendo riferimento a particolari sottospazi rettificabili di R^n . Per esempio, un arco di linea 1 – rettificabile ha la caratteristica di avere lunghezza (misura 1- dimensionale) finita. Analogamente, un elemento di superficie 2 – rettificabile ha la caratteristica di avere area (misura 2- dimensionale) finita . ([14])
Sempre facendo riferimento a sottospazi rettificabili di R^n , si ha anche il seguente teorema .
Teorema - Se $A \subseteq R^n$ è un sottospazio k – rettificabile di R^n , allora esiste lo spazio tangente k – dimensionale , H^k – q.o. in A ([15]) .
("H^k – q.o. in A" significa: q.o. rispetto alla misura di Hausdorff k – dimensionale . Oppure, semplificando: tranne al più un sottoinsieme $E \subset A$ tale che $\dim_H E < k$.)

Questo teorema ci consente di affermare che un arco di linea 1 – rettificabile possiede retta tangente q.o. . E, analogamente, che una superficie 2 – rettificabile possiede piano tangente q.o. E così via, per le varietà k – rettificabili…

Diremo infine che, dato $a \in X$, lo spazio X è **localmente n – rettificabile** in a se esiste un intorno $W \subseteq X$ di a tale che W sia n – rettificabile.

IV– FRATTALI

I frattali sono particolari sottospazi di R^n , $n \neq 0$. Una possibile definizione di essi è la seguente.

Un **frattale** in R^n è un sottospazio $\mathfrak{I}$ di R^n tale che:

1) $\mathfrak{I}$ non ha punti isolati;
2) qualunque punto $p \in \mathfrak{I}$ si consideri, qualunque sia $k \in N$, $0 < k \leq n$, $\mathfrak{I}$ **non è localmente k – rettificabile** in p .

Ora, è d'obbligo la seguente domanda: ma esistono insiemi con siffatta proprietà? La risposta è sì. Frattali sono stati scoperti fin dal XIX secolo (almeno). Nella seconda metà del '900 poi, essi hanno acquistato notevole rinomanza, grazie alle possibilità offerte dalla grafica computerizzata .

L'aggettivo **frattale** (anche sostantivato), coniato dal matematico polacco (naturalizzato francese) Benoît B. Mandelbrot, stava ad indicare insiemi aventi $\dim_H$ non intera (e dunque, $\dim_H \neq \dim_T$). Questo requisito, in realtà, non è essenziale affinchè uno spazio sia frattale: nella Sezione V, forniremo due esempi di frattali aventi $\dim_H$ intera.

Viceversa però, sussiste il seguente teorema ([16]) .
Teorema – Se X è un sottospazio di R^n con $\dim_H X = \alpha$ e α **non intero** , allora q.o. X non possiede lo spazio tangente.

Il precedente teorema implica che un sottospazio X di R^n con $\dim_H X$ non intera, è un frattale secondo la precedente definizione.
Classici esempi di frattali sono i seguenti .

1) X è un arco di linea, dunque $\dim_T X = 1$, che non possiede retta tangente in alcun suo punto .
2) X è un elemento di superficie, dunque $\dim_T X = 2$, che non possiede piano tangente in alcun suo punto.

E, in generale :

3) X è una sottovarietà k – dimensionale di R^n , dunque $\dim_T X = k$, che non possiede spazio tangente in alcun suo punto (quindi, X è una sottovarietà di classe soltanto C^0).

IL viceversa non è vero. Nella prossima Sezione (Osservazione a margine dell'Esempio 8) accenneremo alla **Curva di Lebesgue** , che è un esempio di frattale differenziabile q.o.

V– ESEMPI DI FRATTALI

Proporremo adesso una raccolta di frattali di R^3 . Le tecniche per il calcolo (preciso o approssimato) della loro $\dim_H$, travalicano lo spazio di questa esposizione, per cui, per esse, si rimanda a [17] . Una di tali tecniche sfrutta, quando è presente, una caratteristica che certi frattali posseggono (pur non essendo essa condizione necessaria affinchè un insieme sia un frattale). Tale caratteristica, detta **autosimilitudine** , o **autosomiglianza** , è posseduta da molti dei frattali che qui presenteremo: essa, in un certo senso, determina, tra le figure frattali, quelle che più facilmente possono essere definite.

Di essa, e della relativa tecnica di calcolo di $\dim_H$, parleremo nella Sezione VI di questo scritto.

Esempio n. 1 – **L' Insieme di Cantor, *C***

$$\dim_T C = 0 \quad ; \quad \dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0{,}6309$$

Per definire questo insieme, si parta da un intervallo chiuso non vuoto I di R, di lunghezza $l > 0$; lo si divida in tre sub-intervalli consecutivi di uguale lunghezza, e si consideri l'insieme I_1, ottenuto da I rimuovendo il sub-intervallo aperto centrale; si ripeta la stessa operazione sui due sub-intervalli di I_1, ottenendo un nuovo insieme I_2 , e così via, …; alla k-esima operazione, l'insieme I_k sarà formato da 2^k intervalli chiusi disgiunti, ciascuno di lunghezza $(1/3^k) \cdot l$ (Figura V.1) .

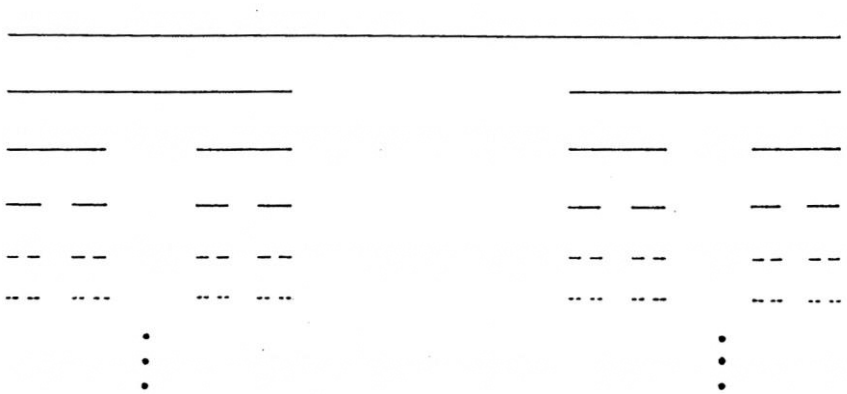

Figura V. 1

Definiamo $C = \cap_{k \in N} I_k$.

Che C, sottoinsieme di R^1 , abbia $\dim_T$ che degrada da uno a zero è facilmente deducibile, utilizzando la seconda definizione di $\dim_T$.
C è un insieme compatto, con la cardinalità del continuo, totalmente sconnesso ([18]) . Quest'ultima caratteristica implica che l' Insieme di Cantor sia un frattale, poiché qualunque punto $p \in C$ si consideri, in tale punto non esiste spazio tangente 1 – dimensionale (retta tangente). Inoltre, la natura frattale di C è attestata dalla $\dim_H C$, per il calcolo della quale, si veda la Sezione VI.

<u>Esempio n. 2</u> – **La curva di Von Koch, *K*** .

$$\dim_T K = 1 \quad ; \quad \dim_H K = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}26186 \qquad ([19])$$

Per definire questo insieme, si parta da un segmento s di retta, lo si divida in tre segmenti consecutivi congruenti, e si sostituisca il terzo centrale con la spezzata bilatera del triangolo equilatero di cui esso sarebbe il terzo lato: si ottiene la spezzata quadrilatera s_1 , i cui lati sono, ciascuno, $(1/3)\cdot s$. Si ripeta la stessa costruzione su ogni lato di s_1 : si ottiene la spezzata s_2 , con 4^2 lati, ognuno dei quali è $(1/3^2)\cdot s$. Continuando a ripetere l'operazione, alla n-esima costruzione otteniamo una spezzata s_n con 4^n lati, ognuno dei quali è $(1/3^n)\cdot s$. (Figura V.2)

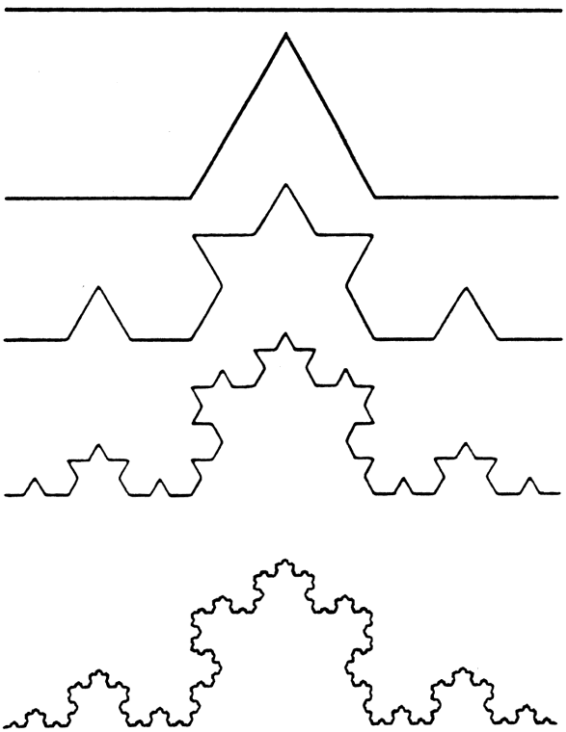

Figura V. 2

Ognuna delle s_n , $n \in N$, $n \geq 1$, rappresenta una approssimazione di K . Definiamo

$$K = \lim_{n \to +\infty} s_n$$

Osservazione 1 – Il limite è da intendersi come segue. Si consideri l'insieme degli archi di linea del piano, aventi come estremi gli estremi di s; indichiamolo con Γ . Si indichi con d la distanza consueta tra due punti del piano e ancora con d si indichi la distanza tra un punto ed un insieme del piano.

Quindi, si introduca in Γ la seguente metrica Δ . Dati due archi di linea $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$,

$$\Delta(\alpha,\beta) = \max\{\sup_{p\in\alpha} d(p,\beta) \; ; \; \sup_{q\in\beta} d(q,\alpha)\}$$

Dopodichè, il limite precedente è inteso come limite di una successione nello spazio metrico (Γ, Δ) . –

L'insieme K è un frattale nel piano. Infatti esso è un arco di linea, e dunque $\dim_T K = 1$ (come si può dedurre utilizzando la terza definizione di $\dim_T$) ma, come è evidente considerando le successive approssimazioni di K , esso non possiede retta tangente in alcun suo punto ([20]) .

Daremo adesso due esempi di linee frattali che sono entrambe grafici di funzioni particolari. Ognuna di tali funzioni si definisce come somma di una serie, e i termini di questa serie si ottengono tutti a partire da una certo **generatore** . Questo metodo di costruzione di funzioni continue e in nessun punto differenziabili, era noto molto prima che nascesse una teoria dei frattali ([21]) .

<u>Esempio n. 3</u> – Il generatore è la funzione a **zig-zag** y=g(x) definita come segue

$$g(x) = \begin{cases} x \quad , & x \in [0,1[\\ 2-x \quad , & x \in [1,3[\\ x-4 \quad , & x \in [3,4] \\ g(x') \quad , & (x = x'+4k) \wedge (x' \in [0,4]) \wedge (k \in N) \end{cases}$$

Esso è dunque una funzione periodica di periodo 4, in $R^+ \cup \{0\}$. Nella Figura V.3, a è rappresentato il grafico di g(x) in un periodo.

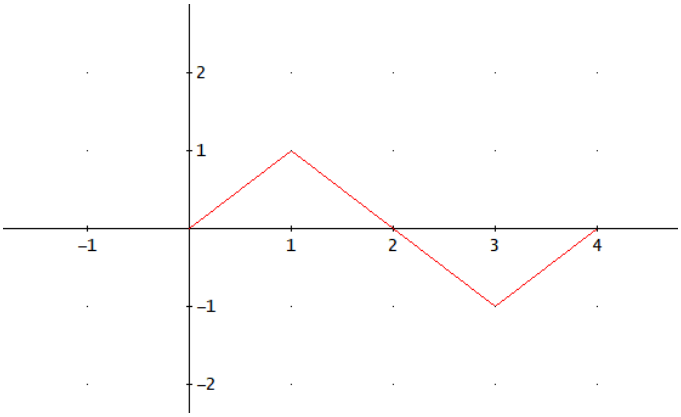

Figura V.3, a

Si consideri ora la funzione, che indicheremo con y = Z(x) , definita come

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{t\cdot k} \cdot g\left(\lambda^k \cdot x\right)$$

con $\lambda \in]1, +\infty[$ e t $\in]-1\,,0[$ (Figura V.3, b)

Z è una funzione continua e non derivabile $\forall$x$\in$R ([22]) . Inoltre, se se λ è sufficientemente grande , si ha ([23]) :

$$\dim_K \text{graph } Z = t+2 \quad .$$

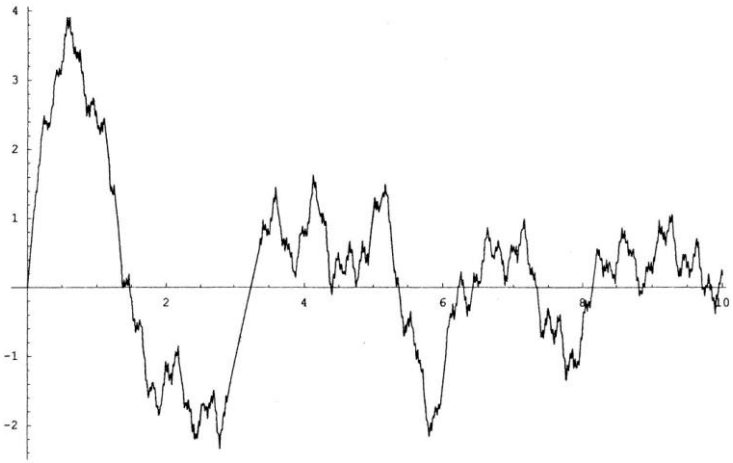

Figura V.3, b

Nella figura indicata, si può osservare il tipo di grafico di una tale funzione Z con $t = -0{,}5$. Dunque

$$\dim_T \text{graph } Z = 1 \quad , \quad \dim_H \text{graph } Z \approx 1{,}5$$

Esempio n. 4 – **Funzione di Weierstrass , *W***

Questa che presentiamo è in realtà, una variante proposta dallo stesso Weierstrass della sua originale funzione (1872) .
Il generatore è la funzione

$$y = \cos x$$

e W è la funzione

$$y = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{t \cdot k} \cdot cos\left(\lambda^k \cdot x\right)$$

con $\lambda \in]1, +\infty[$, $t \in]-1{,}0[$
Tale funzione è continua e non derivabile $\forall x \in R$ ([24]). Inoltre, se λ è sufficientemente grande si ha, come prima, :

$$\dim_K \text{graph} W = t+2 \qquad ([25]) \ .$$

(Figura V.4) .

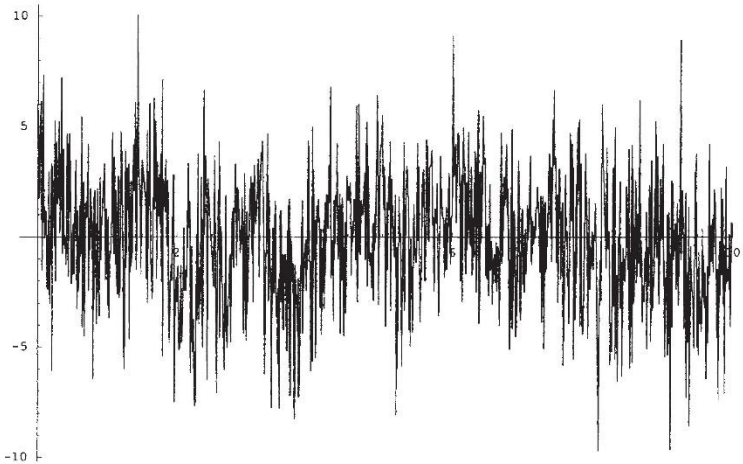

Figura V.4

Nella figura indicata, si può osservare il tipo di grafico di una tale funzione W con $t = -0{,}02$. Dunque,

$$\dim_T \text{graph}W = 1 \quad , \quad \dim_H \text{graph}W \approx 1{,}98$$

<u>Esempio n. 5</u> – **Il triangolo di Sierpinski , S_T**

$$\dim_T S_T = 1 \quad ; \quad \dim_H S_T = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}5849 \qquad ([19])$$

Si consideri, nel piano, un t r i a n g o l o equilatero (inteso come elemento di superficie con bordo); lo si indichi con T_0. Si divida ogni lato in due segmenti consecutivi congruenti; si costruiscano i 2^2 triangoli equilateri congruenti tra loro e simili a quello iniziale; si elimini dalla figura l'interno del triangolo centrale (cioè, il triangolo senza il suo bordo). Indichiamo la figura ottenuta con T_1. Si ripetano le precedenti operazioni su ognuno dei 2^2-1 triangoli rimanenti, e si indichi la nuova figura ottenuta con T_2. Iteriamo all'infinito il procedimento (Figura V.5 , a) e definiamo S_T come:

$$S_T = \cap_{k \in N} T_k$$

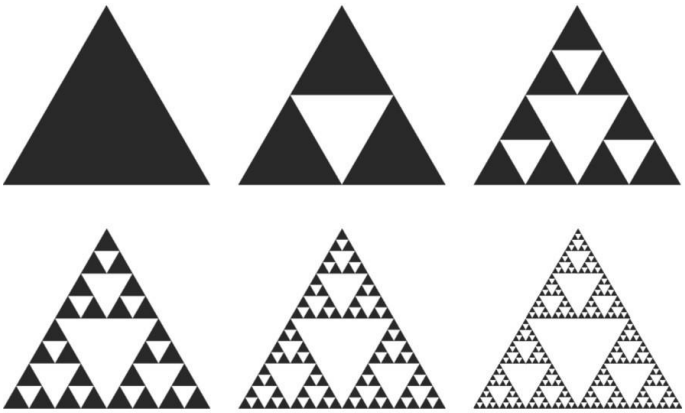

Figura V.5 , a

S_T è una linea del piano. Essa si ottiene con un passaggio al limite analogo a quello dell' Esempio 2. Infatti, in ogni successiva iterazione si può introdurre un ordinamento sui punti centrali dei triangoli equilateri e costruire la spezzata che li congiunge, Così facendo, alla k – esima iterazione avremo una spezzata s_k, ed S_T si otterrà come limite di queste spezzate. (Figura V.5 , b)

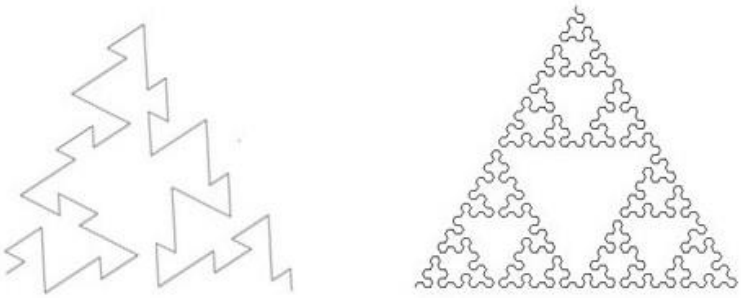

Figura V.5 , b

Che la $\dim_T$ di S_T degradi da 2 a 1 si può ricavare, anche stavolta, ricorrendo alla seconda definizione di $\dim_T$. La sua $\dim_H$ testimonia che si tratta di un frattale .

<u>Esempio n. 6</u> – **Il quadrato di Sierpinsky, S_Q**

$$\dim_T S_Q = 1 \quad ; \quad \dim_H S_Q = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1{,}89279 \qquad ([19])$$

E' una variante della figura dell'Esempio 5. Si consideri, nel piano, un quadrato (inteso come elemento di superficie con bordo); lo si indichi con Q_0. Si divida ogni lato in tre segmenti consecutivi congruenti; si costruiscano i 3^2 quadrati congruenti e con i lati paralleli, rispettivamente, a quelli del quadrato iniziale; si elimini dalla figura l'interno del quadrato centrale.

Indichiamo la figura ottenuta con Q_1. Si ripetano le precedenti operazioni su ognuno dei 3^2-1 quadrati rimanenti, e si indichi la nuova figura ottenuta con Q_2. Iteriamo all'infinito il procedimento (Figura V.6) e definiamo S_Q come:

$$S_Q = \cap_{k \in N} Q_k$$

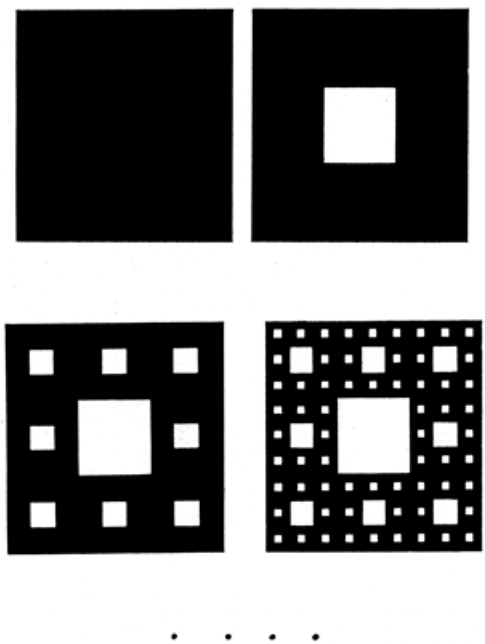

Figura V.6

Come nell'Esempio 5, possiamo affermare che S_Q è una linea del piano. Infatti, in ogni successiva iterazione si può introdurre un ordinamento sui punti centrali dei quadrati e costruire la spezzata che li congiunge. Ed S_Q si otterrà come limite di queste spezzate Abbiamo ancora una volta una linea frattale.

La curva S_Q ha la seguente notevole proprietà ([26]).

Proprietà – Se X è un sottoinsieme compatto e connesso di R^2 e $\dim_T X = 1$, allora X è omeomorfo ad un sottoinsieme di S_Q .

Quindi, la linea S_Q contiene immagini omeomorfe di tutte le linee del Piano. Con riguardo alla suddetta proprietà, S_Q viene indicata come una curva **universale** del Piano. Si può dire insomma che S_Q è la più "complicata" linea del Piano.

Una conseguenza di tale proprietà, per esempio, è che se β è un arco di linea differenziabile, S_Q contiene un'immagine omeomorfa di β, che non è differenziabile in alcun suo punto.

Esempio n. 7 – **La "spugna" di Menger, *M***

$$\dim_T M = 1 \quad ; \quad \dim_H M = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2{,}7268 \qquad ([19])$$

L'insieme *M* si costruisce in modo analogo al tappeto di Sierpinsky (Esempio n. 5), considerando come figura iniziale, in R^3 , un cubo (intendendo l'involucro convesso, cioè la figura "solida").
I suoi spigoli vengono divisi in tre segmenti consecutivi congruenti; il cubo viene diviso in 3^3 cubetti con gli spigoli paralleli a quelli originari. Quindi si eliminano dalla figura gli interni delle tre "colonne" di cubetti centrali (7 cubetti in tutto). Si itera il procedimento sui cubetti rimanenti, e così via, all'infinito.
(Figura V.7)

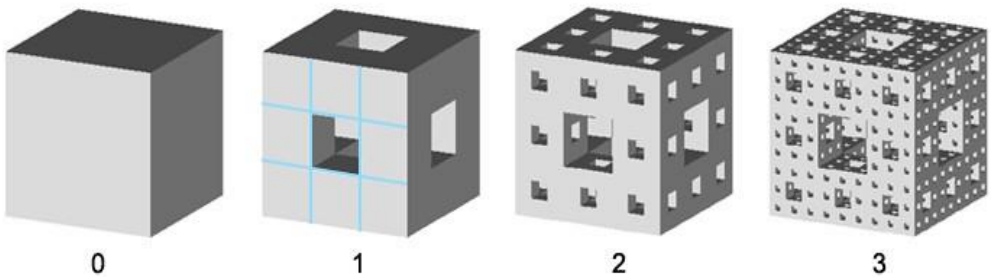

Figura V.7

Per l'insieme M si ripetono le stesse considerazioni fatte per il frattale S_Q (analoghe a quelle fatte per S_T) . In ogni successiva iterazione si può introdurre un ordinamento sui punti centrali dei cubi e costruire la spezzata che li congiunge. Così facendo, M diventa una linea dello spazio R^3 . La sua $\dim_H$ indica, anche stavolta, che si tratta di una linea frattale. La linea M ha in R^3 la medesima proprietà di universalità che ha S in R^2 (si veda sempre [26]) .
Iterando in R^n , con n > 3, e sui relativi ipercubi , lo stesso procedimento con cui i sono ottenuti S_Q ed M , si continueranno ad ottenere curve che hanno, in R^n , la stessa proprietà di universalità .

Esempio n. 8 – **La curva di Hilbert – Peano , *P***

Si abbia un quadrato nel piano, si prendano i punti medi dei suoi lati e si costruiscano i 2^2 quadrati congruenti, con i lati paralleli a quelli del quadrato iniziale. Si stabilisca un ordinamento per essi, in modo che due quadrati consecutivi (in tale ordinamento) abbiano un lato in comune: sia Q_0 , Q_1 , Q_2 , Q_3 , tale insieme ordinato. Si costruisca la spezzata P_1 avente per vertici, nello stesso ordine, i centri di tali quadrati.
Si ripeta la stessa costruzione su ognuno dei Qi , i = 0, 1, 2, 3 .

Dunque si otterranno i quadrati

$$\{Q_{ij}\}_{i,j\in\{0,1,2,3\}}$$

(ovviamente, Q_{i0} , Q_{i1} , Q_{i2} , Q_{i3} , sono i quattro quadrati in cui è stato suddiviso il quadrato Q_i).

Si ripeta l'ordinamento sui 2^4 quadrati ottenuti, facendo in modo che i quadrati in cui viene diviso ogni Q_i abbiano come consecutivi quelli di Q_{i+1} . Si costruisca, come prima, la spezzata P_2. E così via, all'infinito. (Figura V.8)

Indicando con P_n la spezzata ottenuta nell' n – esima iterazione, definiamo P come

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n$$

(il limite va inteso come detto nell'Osservazione V – 1).

Nella figura indicata, vengono costruite le spezzate da P_1 a P_5 . Per le prime tre è evidenziata, inoltre, anche la relativa suddivisione del quadrato iniziale.

L'insieme limite, P, riempie il quadrato iniziale, per cui

$$\dim_T P = \dim_H P = 2$$

Quindi, a dispetto del suo nome, la curva di Hilbert – Peano non è affatto una curva nel senso ordinario (nella Sezione I si è vista la definizione consueta di queste figure) .

Osservando le successive approssimazioni di P , si intuisce che essa non possiede tangente in alcun suo punto ([27]). Il che attesta la sua natura frattale.

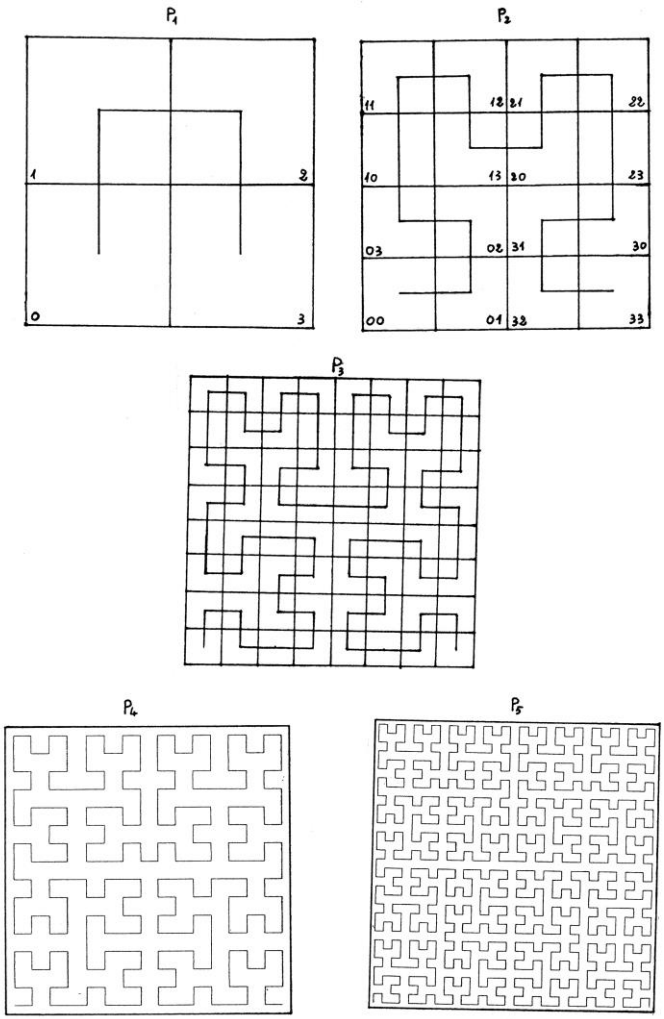

Figura V.8

La curva di Hilbert - Peano è un esempio di quelle che vengono chiamate **space filling curves** . Per descrivere tali figure, premettiamo una definizione.
Definizione 1 – Dato uno spazio topologico X , e dato un intervallo non vuoto $[a , b] \subset R$, un cammino (path) in X è un'applicazione continua

$$f : [a , b] \to X$$

Geometricamente diciamo che $f([a , b]) \subset X$ è un cammino di estremi $f(a)$ ed $f(b)$.
Dalla definizione si capisce che un cammino non è necessariamente un arco di linea.
In generale, una **space filling curve** è un'applicazione continua e **surjettiva** $f : [a , b] \to X$, dove X è uno sottospazio di R^n tale che $\dim_T X \geq 2$.
Quali sono le proprietà di tali figure?
Limitiamoci a considerare funzioni continue e surjettive

$$f : [a , b] \to [a , b]^n$$

(la *P* dell'Esempio 7 essendo un'applicazione continua e surjettiva $f : [a , b] \to [a , b]^2$ è un cammino che riempie un quadrato del piano).
Intanto, una tale funzione **non può essere injettiva** , poiché altrimenti, essendo $[a , b]$ ed $[a , b]^n$ entrambi spazi compatti e di Hausdorff, la f sarebbe un omeomorfismo. E dunque si avrebbe l'assurdo che $\dim_T [a , b]$ sarebbe uguale a $\dim_T [a , b]^n$ (?) .
Dunque, non essendo f injettiva, il cammino da essa individuato dovrà **autointersecarsi** in qualche punto. In realtà, si dimostra che tale cammino si autointerseca in una **infinità non numerabile** di punti ([28]) . E questo anche nel caso di figure, come la *P* , che sono limite di curve approssimanti ciascuna delle quali non si autointerseca .
Osservazione – Una space filling curve, pur essendo un frattale, ha $\dim_H$ intera . Quindi una tale figura non necessariamente sarà ovunque non differenziabile (come nel caso della *P).* Una conferma di ciò è nel seguente esempio.

Lebesgue's space – filling curve (Figura V. 9) .

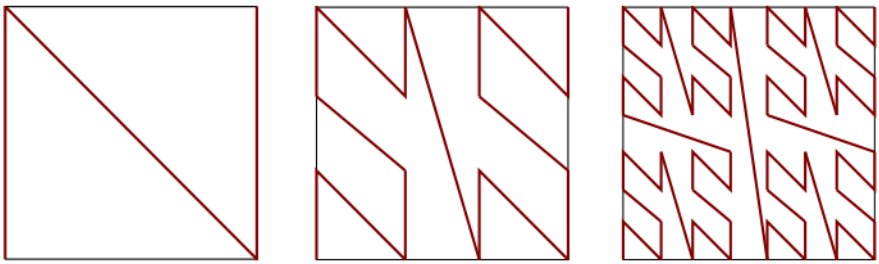

Figura V. 9

Analiticamente, essa è data da una funzione $f : [0 , 1] \to [0 , 1]^2$ (dunque è una space filling curve che riempie un quadrato del piano). Se si considera l'Insieme di Cantor C costruito sull'intervallo $[0 , 1]$, f risulta differenziabile in tutti i punti di $[0 , 1] \setminus C$ e non differenziabile in tutti i punti di C . Quindi f è differenziabile q.o. in $[0 , 1]$. Nella figura indicata, sono rappresentate tre successive iterazioni di spezzate convergenti alla curva di Lebesgue. Per approfondimenti sull'argomento, si rimanda a [29] .

A conclusione di questa breve lista di frattali, faremo adesso alcuni esempi di superfici frattali (per la definizione di superficie si rimanda, come già detto, a [5] , [7] , e alla Sezione VII di questo scritto).

<u>Esempio n. 10</u> – **La superficie quadratica di Koch, K_Q**

$$\dim_T K_Q = 2 \quad ; \quad \dim_H K_Q = \frac{\log 13}{\log 3} \approx 2{,}334717$$

Per la precisione, quella che descriveremo è detta superficie quadratica di Koch del tipo 1. Il procedimento con il quale la si costruisce, non è altro che una estensione a dimensioni superiori di quello seguito per la costruzione della curva di Koch K .

Si parta da un quadrato di lato l (inteso come **elemento di superficie con bordo**) , si divida ogni lato in tre segmenti consecutivi congruenti e si costruiscano i 3^2 quadrati congruenti e con i lati paralleli, rispettivamente, a quelli del quadrato iniziale. Ora si elimini dalla figura il quadrato centrale , **senza il bordo** (cioè soltanto l'interno) e, scelto una volta per tutte un verso per la normale al quadrato iniziale, si incolli sul bordo rimasto, la **superficie cubica** di spigolo $(1/3)\cdot l$, **privata della faccia** col cui bordo avviene l'incollamento. La superficie ottenuta possiamo indicarla con S_1 . Si ripeta la stessa costruzione su tutti i quadrati rimanenti dell'originale e su quelli della superficie cubica, sui quali scegliamo di incollare verso l'esterno di essa. Otterremo così la superficie S_2 (Figura V.8 , a) . E così all'infinito..
Definiamo

$$K_Q = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

dove il limite va inteso in modo analogo a quello dell'Esempio 2 .
(Figura V.10 , a , b) .

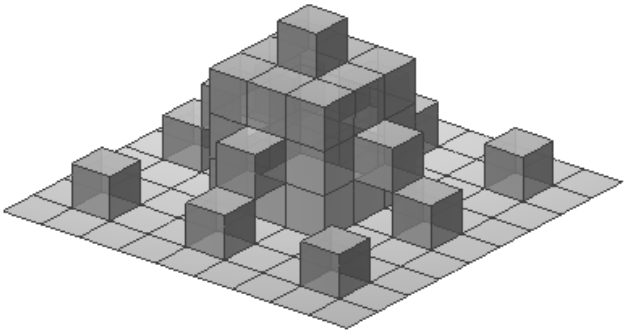

Figura V.10, a

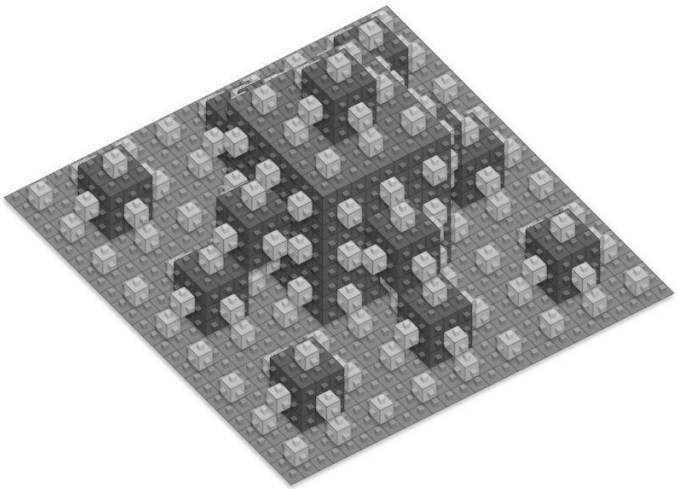

Figura V.10, b

Nella figura indicata sono presenti due successive approssimazioni della K_Q . La $\dim_H K_Q$ può essere calcolata come in [19] , con le opportune modifiche. La $\dim_T K_Q$ può essere dedotta utilizzando la seconda definizione di $\dim_T$.

L'insieme K_Q è dunque un frattale nello spazio R^n , $n \geq 3$. Esso è una superficie che, come è evidente considerando le successive approssimazioni di K_Q , non possiede piano tangente in alcun suo punto.

Nei prossimi due esempi, faremo riferimento al seguente teorema.

Teorema – Dati due insiemi compatti $A \subseteq R^n$ e $B \subseteq R^m$,

$$\dim_H A \times B \geq \dim_H A + \dim_H B \qquad ([30])$$

($\dim_H A \times B$ si intende calcolata in R^{n+m}) .

Esempio n. 11 – Sul piano xz, nel semipiano $z \geq 0$, si consideri la curva di Koch K generata a partire da un segmento $\overline{PQ}$ sull'asse x . Sia dato inoltre un intervallo $[a , b] \subset R$, con $a \neq b$. Si consideri la figura σ definita analiticamente da:

$$\sigma = \{(x, y, z,) \in R^3 : ((x , 0 , z) \in K) \wedge (y \in [a , b])\} \ .$$

Dunque, σ è una realizzazione geometrica del prodotto cartesiano $K \times [a , b]$.

Dalla sua definizione analitica, e applicando la definizione data in Appendice , discende che σ è una superficie. Per la sua $\dim_H$ in R^3 , si ha

$$\dim_H \sigma \geq \dim_H K + 1 \approx 2{,}26$$

e dunque

$$2{,}26 \leq \dim_H \sigma < 3$$

Essa è una superficie frattale, essendo ogni suo punto priva di piano tangente.

La seguente Figura V.11 ci dà una approssimazione della superficie frattale che si ottiene con il prodotto cartesiano $K_{snow} \times [a , b]$, dove con K_{snow} abbiamo indicato la curva detta **fiocco di neve di Koch** (**Koch snowflake**) . Essa è una curva chiusa composta da tre curve di Koch e si ottiene, come si intuisce facilmente osservando la Figura V.12 , costruendo la curva di Koch su ciascuno dei tre lati di un triangolo equilatero.

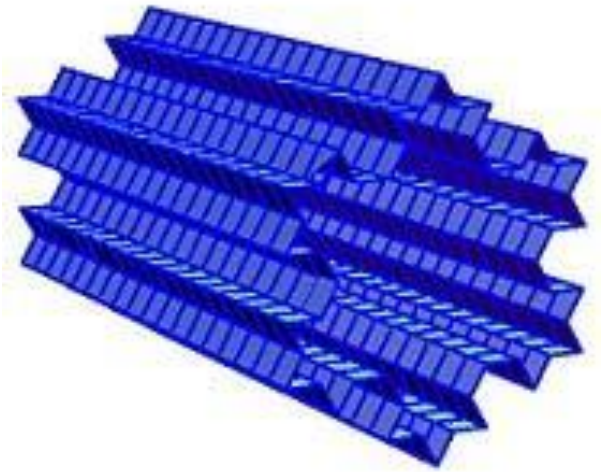

Figura V.11

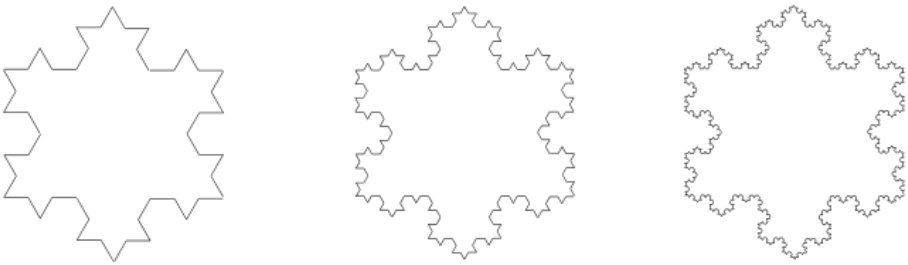

Figura V.12

Esempio n. 12 – Una figura ancora più complicata si ottiene modificando l'Esempio n.11 nel modo seguente.
Sul piano xy , si considera la curva graph Z dell'Esempio n. 3 , e di tale linea si sceglie un arco con estremi in due suoi punti P e Q di intersezione con l'asse x. Sul piano xz si considera la curva K generata a partire dal segmento $\overline{PQ}$, come prima. Si consideri la figura τ definita analiticamente da:

$$\tau = \{(x, y, z,) \in R^3 : ((x, 0, z) \in K) \wedge (0 \leq y \leq Z(x))\}$$

Come figura dello spazio R^3 , di essa possiamo dire (utilizzando la seconda definizione di $\dim_T$) che

$$\dim_T \tau = 2$$

Invece, riguardo alla $\dim_H \tau$ in R^3 possiamo dire, in analogia con l'Esempio n.11, che,

$$\dim_H \tau \geq 2{,}8$$

Esempio n. 13 – Costruzione di una **pseudo- superficie** frattale.

Sia fissato, nello spazio R^3, un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O,x,y,z). Sul piano xz , nel semipiano $z \geq 0$, si consideri la curva di Koch K , generata a partire da un segmento $\overline{PQ}$ sull'asse x . Sull'asse y consideriamo, invece, l'Insieme di Cantor C costruito sul segmento di estremi O(0, 0, 0,) e A(0,0,1). Si consideri la figura ψ definita analiticamente da:

$$\psi = \{(x, y, z,) \in R^3 : (x,0,z) \in K \wedge (0,0,y) \in C\}$$

Dunque, ψ è una realizzazione geometrica del prodotto cartesiano $K \times C$. (Figura V.13) .

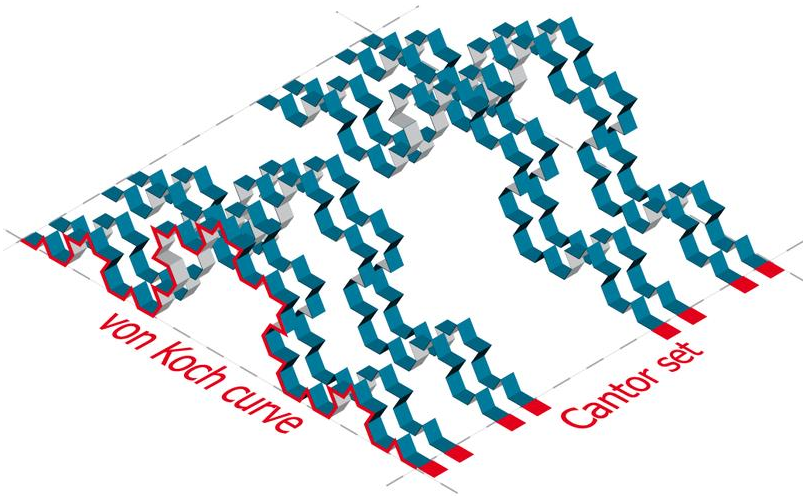

Figura V.13

Osservando la figura indicata, che ovviamente ci dà un'approssimazione della ψ , si capisce che la ψ , pur non essendo una superficie (si veda l'Appendice), ha però caratteristiche geometriche che la fanno assomigliare ad una superficie; ecco perché l'ho denotata col termine **pseudo-superficie** .
Considerato che

$$\dim_T K = 1 \quad \text{e} \quad \dim_T C = 0$$

segue dal Teorema 2 della Sezione I , che

$$\dim_T \psi \leq 1 \quad .$$

D'altronde, ψ è un insieme di linee, per cui deve essere

$$\dim_T \psi \geq 1 \quad .$$

Se ne conclude che

$$\dim_T \psi = 1 \quad .$$

Considerato inoltre che

$$\dim_H K = \frac{\log 4}{\log 3} \quad \text{e} \quad \dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}$$

segue dal Teorema visto poc'anzi che si ha, in R^3 ,

$$\dim_H \psi \geq \frac{\log 4}{\log 3} + \frac{\log 2}{\log 3} \approx 1{,}8927$$

Con una considerazione qualitativa, possiamo dire che ψ, dal punto di vista topologico, è un'unione di linee che non si "addensano" a sufficienza da costituire una superficie. Ogni punto di essa è privo di spazio tangente .

Se invece di $K \times C$ considerassimo $S_T \times C$ oppure $S_Q \times C$ allora, ripetendo tutte le considerazioni fatte per la ψ , potremmo ottenere ancora figure costituite da un'unione di linee che non si "addensano" a sufficienza da costituire una superficie, ma la cui $\dim_H$ sarebbe maggiore di 2 . Dunque otterremmo figure che, rispetto alla dimensione di Hausdorff sarebbero addirittura "più spesse" di un'ordinaria superficie.

(Alcune delle figure presentate nella Sezione V sono state tratte dal sito web indicato in [35]).

VI– AUTOSOMIGLIANZA

Accenniamo ora ad una proprietà che certi frattali posseggono e che è detta "autosimilitudine" o "autosomiglianza". Vedremo che, ove tale proprietà venga posseduta da una figura, può risultare abbastanza agevole il calcolo della $\dim_H$ di essa. Si può dire che, tra i frattali, quelli autosimili sono oggetti più semplici da descrivere. Rimarchiamo comunque che tale proprietà non è né condizione necessaria né condizione sufficiente affinché un insieme sia frattale.

Dato uno spazio metrico (X, d), una applicazione f: $X \to X$ è detta **similitudine** se:

$$(\exists k \in R^+)(\forall x \in X)\ (\forall y \in X)(d(f(x),f(y)) = k \cdot d(x,y))$$

Il numero reale positivo e non nullo k , è detto **rapporto di similitudine** .

Indichiamo con (f,k) la similitudine $f : X \to X$, di rapporto k.

Indicato inoltre con [m] l'insieme di numeri naturali {1 , 2, …m} , sia $\{(f_i,k_i)\}_{i \in [m]}$ una famiglia di similitudini f_i su X, con f_i avente per rapporto k_i. Indichiamo con f la trasformazione $f : P(X) \to P(X)$ (P (X) indica l'insieme delle parti di X), tale che:

$$(\forall F \subseteq X)\ (f(F) = \cup_{i \in [m]} f_i(F)) \quad .$$

La trasformazione f può anche essere iterata, per cui

$$f \circ f\ (F) = f\ (f(F))$$

Usando la notazione esponenziale, scriveremo:

$$f^0(F)=F \ ;\ f^{n+1}(F) = f\ (f^n(F)) \ , n \in N.$$

Supponiamo adesso che $X = R^n$ e che $(\forall i \in [m])\ (0 < k_i < 1)$ cioè, ogni similitudine della famiglia sia una **contrazione** . In questo caso, $\{(f_i,k_i)\}_{i \in [m]}$ viene detta una **IFS** (**iterated function system**) .

Se indichiamo con T la classe dei sottoinsiemi compatti e non vuoti di R^n, si hanno i seguenti teoremi ([31]).

<u>Teorema 1</u> – Esiste in T un unico insieme E che è invariante per f , cioè

$$f\ (E) = E. –$$

Tale insieme è detto anche **attrattore** dell' IFS $\{(f_i,k_i)\}_{i \in [m]}$ – .

Risulta dunque:

$$E = \cup_{i \in [m]} f_i(E).$$

Per determinare tale attrattore, dotiamo T di una metrica δ .

Anzitutto, dato un insieme $A \subset R^n$, e dato $\varepsilon \in R^+$, definiamo **ε - intorno di A** l'insieme

$$A_\varepsilon = \{x \in R^n : (\exists\, a \in A)(d(x,a) < \varepsilon\}$$

dove con d(x,y) si è indicata la metrica usuale in R^n . A questo punto, dati due insiemi $U \in T$ e $W \in T$ definiamo la loro distanza δ(U , W) nel seguente modo:

$$\delta(U , W) = \inf\{\eta \in R^+ : (U \subset W_\eta \wedge W \subset U_\eta\}$$

La metrica δ viene detta **metrica di Hausdorff** .
Un modo equivalente per definire δ poteva essere

$$\delta(U,W) = \max\{sup_{x\in U} d(x,W), sup_{y\in W} d(y,U)\} \quad .$$

(A proposito della metrica δ in *T* , si riveda anche l'Esempio n. 2 - Capitolo V) .
<u>Teorema 2</u> – Se A è un qualunque insieme di *T*, l'insieme invariante E si ottiene come

$$E = \lim_{n\to+\infty} f^n(A)$$

dove il limite va inteso nello spazio metrico (*T*, δ). –
Il Teorema che segue, ci fornisce una condizione sufficiente per il calcolo della $\dim_H$ dell'attrattore di una IFS. Preliminarmente ad esso, ci occorre definire un'ulteriore proprietà.
Definizione – Diciamo che una IFS soddisfa la **condizione dell'insieme aperto** (**open set condition**) se esiste un insieme aperto non vuoto e limitato, W tale che

(*) $\quad f(W) \subset W \wedge (i \neq j \rightarrow f_i(W) \cap f_j(W) = \varnothing$

Detto ciò, si ha, infine il seguente ([32]) .
<u>Teorema 3</u> – Sia data una IFS $\{(f_i,k_i)\}_{i\in[m]}$ e supponiamo che essa soddisfi la condizione dell'insieme aperto. Detto $E \in T$ l'attrattore della IFS, si ha

$$\dim_H E = s \quad ,$$

dove s è l'unica soluzione dell'equazione

$$\Sigma_{i\in[m]} (k_i)^S = 1 \quad - .$$

Per la (semplice) dimostrazione dell'unicità della soluzione della precedente equazione, si veda [33] .
Vediamo ora cos'è un insieme **autosimile** . Esso deve essere, anzitutto, un insieme invariante per una IFS . Ma si richiede una cosa in più: le parti di cui si compone **non si devono sovrapporre troppo** .
Per chiarire questo concetto, si tenga presente che, detta $\{(f_i,k_i)\}_{i\in[m]}$ la IFS , ognuna delle f_i, in quanto similitudine, è ovviamente una funzione bi-lipschitziana e dunque, detto E il suo insieme invariante, si ha che

$$(\forall i\in[m])(\dim_H f_i(E) = \dim_H E)$$

Fatta questa premessa, l'ulteriore proprietà richiesta nella definizione di insieme auto-simile è la seguente.

$$(**)\quad (\forall i\in[m])(\forall j\in[m])((i \neq j) \rightarrow \dim_H(f_i(E) \cap f_j(E)) < \dim_H E$$

In conseguenza della (**) , un insieme E autosimile risulta dunque composto di parti distinte (nel senso che nessuna di esse è contenuta in qualche altra), ciascuna delle quali è simile ad E stesso (e dunque, aventi tutte la stessa $\dim_H$ di E). Le eventuali sovrapposizioni $f_i(E) \cap f_j(E) \neq \emptyset$, con $i \neq j$, le quali non sono necessariamente simili ad E , devono avere dimensione inferiore ad esso .
La (**), in particolare, si verifica, ovviamente, se le parti di cui E si compone sono disgiunte, cioè

$$(i \neq j) \rightarrow (f_i(E) \cap f_j(E) = \emptyset) \quad .$$

Abbiamo infine il seguente teorema. ([34])
<u>Teorema 4</u> – Se la IFS $\{(f_i,k_i)\}_{i\in[m]}$ soddisfa la condizione dell'insieme aperto, allora il suo attrattore E è un insieme autosimile – .

Applichiamo i precedenti risultati all' Insieme di Cantor, *C*. Nello spazio ambiente R^1 , supponiamo che l'intervallo di partenza *I* sia [0,1] . Indichiamo con O(0) e A(1) gli estremi di *I* . Consideriamo la IFS costituita dalle due seguenti similitudini:
(f_1 , 1/3) , con f_1 omotetia di centro O e rapporto 1/3;
(f_2 , 1/3) , con f_2 omotetia di centro A e rapporto 1/3 .

Dunque:

$f_1 : (x \to x') \wedge (x' = \frac{1}{3} \cdot x)$;

$f_2 : (x \to x') \wedge (x' - 1 = \frac{1}{3} \cdot (x-1))$, (ossia : $x' = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$) .

Posto, come prima, $(\forall F \subseteq I)(f(F) = f_1(F) \cup f_2(F))$, si vede subito che

$$C = \lim_{n \to +\infty} f^n(I)$$

Tale IFS inoltre soddisfa la condizione dell'insieme aperto , come si può verificare considerando, per esempio, l'intervallo]0 , 1[. Perciò *C* , che è l'attrattore della nostra IFS , è un insieme autosimile . Ricaviamo la $\dim_H C$, usando il Teorema 3 . Posto

$$s = \dim_H C \quad ,$$

dovrà essere

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \quad ,$$

da cui

$$s = \frac{\log 2}{\log 3} \quad .$$

Sono autosimili anche i seguenti altri frattali descritti nella SezioneV : la curva di Koch; il triangolo e il quadrato di Sierpinsky; la spugna di Menger ; la curva di Hilbert – Peano; la curva di Lebesgue; la superficie quadratica di Koch; gli Esempi 11 e 13. Anche per questi frattali, la dimH si ricava applicando in modo opportuno il Teorema 3 .

VII– APPENDICE:
UNA DEFINIZIONE GEOMETRICA DI SUPERFICIE

Definizione 2 – Sia dato un insieme Γ di infiniti archi di linea in R^n , con $n \geq 2$ e sia Π l'insieme dei suoi punti, cioè $\Pi = \cup \Gamma$
Supponiamo che si abbiano le seguenti proprietà.

1) Dati due archi qualunque $\alpha \in \Gamma$ e $\beta \in \Gamma$, $\alpha \cap \beta = \varnothing$.
2) Γ è un insieme ordinato, con ordinamento continuo , $(\Gamma , <)$ (cioè, esiste un ordinamento continuo degli archi di linea di Γ)
3) Considerato un qualunque arco $\alpha \in \Gamma$, considerato un qualunque punto $P \in \alpha$ e considerato un qualunque intorno U di P , esiste un intorno $W \subset U$ di P ed esiste un intervallo non vuoto di archi di linea $]\beta , \gamma[$ di Γ tale che: $\alpha \in]\beta , \gamma[$ (oppure $\alpha = \beta \vee \alpha = \gamma$ nel caso in cui α sia un estremo di Γ) e si ha
$$W \cap \Pi = (\cup \,]\beta , \gamma[ )$$
Cioè, i punti di $W \cap \Pi$ sono quelli degli archi di linea dell'intervallo $]\beta , \gamma[$. Detto in altro modo, la topologia di Π indotta da quella di R^n coincide con quella indotta in Π dalla relazione d'ordine in $(\Gamma , <)$.

Se valgono le proprietà 1) , 2) , 3) , diremo che l'insieme Π è un **elemento di superficie** di R^n . Infine, diremo che un insieme $\Xi \subseteq R^n$ è una **superficie** , se Ξ è un insieme connesso e localmente è un elemento di superficie .

RIFERIMENTI

[1] G. Edgar, "Measure, Topology and Fractal Geometry" , (Springer, 2008) .
[2] G.C.Barozzi – S. Matarasso, "Analisi matematica 1", (Zanichelli Editore–Bologna, ristampa, 1993), pag. 340.
[3] W. Hurewicz – H. Wallman, "Dimension theory", (Princeton University press, 1948), capitolo IV .
[4] Citato in [3], capitolo V .
[5] O. Montaldo, "Lineamenti di Algebra e Analisi", vol.II. (Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma, 1972), capitolo 4 .
[6] M. Nacinovich, "Geometria 2", (Sansoni Editore, 1986), capitolo XVIII.
[7] Czes Kosniowski, "Introduzione alla Topologia Algebrica", (Zanichelli Editore– Bologna, ristampa, 1996) , capitolo 11 .
[8] Citato in [3], capitolo VI.
[9] Citato in [3], capitolo VII.
[10] Citato in [1], Exercise 6.1.10 .
[11] K. Falconer "Fractal Geometry", (Wiley and Sons, New York, ristampa, 1993), Cap. 3 .
[12] Jonathan Fraser "Assouad Dimension and Fractal Geometry" , (Cambridge University Press, 2020).
[13] H. Federer "Geometric measure theory" , (Springer – Verlag, 1969) .
[14] https://users.dimi.uniud.it/~lorenzo.freddi/cdv07.pdf
[15] https://poisson.phc.dm.unipi.it/~inversi/GMT.pdf
[16] K. J. Falconer , " The Geometry of Fractal Sets" , capitolo 4 (Cambridge University Press, 1985)
[17] K. J. Falconer , " Fractal Geometry", seconda edizione (Wiley and Sons, England, 2003) .
[18] P.R. Halmos, "Measure theory", (Springer – Verlag, New York, 1974), pagg. 66-67.
[19] https://wakespace.lib.wfu.edu/bitstream/handle/10339/33433/Glass_wfu_0248M_10115.pdf
[20] Helge von Koch, "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction geometrique elementaire" (1904) . https://zbmath.org/?q=an%3A35.0387.02
[21] E. W. Hobson , "The theory of functions of a real variable" vol.II, capitolo VI (Cambridge University Press, 1926)
[22] Citato in [17] , pag. 160 e seguenti.
[23] Citato in [17] , capitolo 11 .
[24] https://math.berkeley.edu/~brent/files/104_weierstrass.pdf

[25] https://scholar.rose-hulman.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1217&context=rhumj
[26] Blumenthal – Menger, " Studies in Geometry " (W.H. Freeman and Co., 1969), pagg. da 431 a 435 e pagg. da 501 a 503 .
[27] http://www.dblab.ntua.gr/~gtsat/collection/SFCs/HilbertCurve.pdf
[28] Kupers, A.P.M., "On the non-injective points in the image of a space-filling curve, II", (2008), https://archive.org/details/on-the-non-injective-points-in-the-image-of-a-space-filling-curve-ii
[29] Hans Sagan, "Space – filling curves" (Springer – Verlag, New York, 1994) . Inoltre, si veda https://wwwevs.mathematik.tu-darmstadt.de/index.php?evsid=32&evsver=451&evsdir=1104&evsfile=ch2_curves.pdf , pagg. 12-13.
[30] Citato in [17] , capitolo 7.
[31] Citato in [17] , capitolo 9 .
[32] Citato in [16] , paragrafo 8.3 .
[33] Citato in [1] , teorema 4.1.1
[34] Citato in [16], corollario 8.7 .
[35] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension